

# RETI NEURALI ARTIFICIALI E MODELLI CON AGENTI ADATTIVI

di Pietro Terna

Nei modelli fondati esplicitamente su agenti, molta attenzione merita l'aspetto dell'apprendimento, necessario per l'adattamento all'ambiente e all'azione degli altri soggetti. L'uso delle reti neurali artificiali, che si costruiscono tramite l'apprendimento e sono in grado di approssimare qualsiasi schema funzionale, offre importanti prospettive di sviluppo per la costruzione di esperimenti economici artificiali condotti con modelli fondati su agenti.

Questa nota, dopo una introduzione alle reti neurali artificiali ed al loro uso in economia, tratta modelli fondati su agenti costruiti con reti neurali artificiali. Affronta pertanto il problema dell'interpretazione del funzionamento di una rete neurale, anche sviluppando un'euristica *ad hoc*.

Infine, si analizzano le caratteristiche dei modelli con un solo agente e di quelli con una o più popolazioni di agenti, introducendo il metodo originale dei *cross target*, che ha lo scopo di consentire esperimenti in cui il ricorso a costruzioni teoriche *ex ante* sia ridotto o nullo.

## 1. Introduzione alle reti neurali artificiali (RNA)

Per la presentazione approfondita delle reti neurali artificiali (RNA) del tipo qui utilizzato, cioè *feedforward* (senza retroazioni) con tre o più strati, dette *multilayer perceptron*, si rinvia a McClelland e Rumelhart (1988), Cammarata (1990), Fabbri e Orsini (1993).

*Questo scritto origina da un più ampio lavoro in collaborazione con Andrea Beltratti e Sergio Margarita (le responsabilità e il debito sono ovviamente miei); è parte della ricerca «Intermediazione finanziaria, funzionamento dei mercati ed economia reale» effettuata con fondi erogati dal Ministero dell'Università e della Ricerca scientifica e tecnologica. Una versione molto più ampia, che può essere richiesta all'autore, è stata presentata nel corso della XXXV Riunione scientifica annuale della Società degli economisti (28-29 ottobre 1994, Milano).*

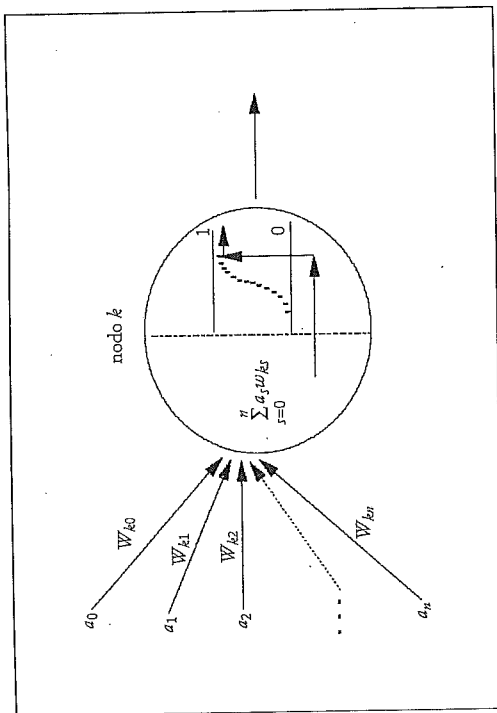


FIG. 1. Schema di un neurone artificiale.

Una funzione a rete neurale produce un vettore di *output* da un vettore di *input*, sulla base di un insieme di parametri (detti pesi) la cui determinazione non si discosta concettualmente dalla consueta determinazione di stime statistiche multivariate, utilizzando il metodo del gradiente. Una RNA del tipo più diffuso è costituita normalmente da tre strati di unità elementari di calcolo (*processing unit*; nodi; neuroni, se si vuole ricordare l'analogia con le reti neurali naturali), di cui uno di *input*, uno intermedio o nascosto (o *hidden*) e il terzo di *output*.

In figura 1 è riportato lo schema di un neurone artificiale: più attivazioni o segnali di *input*, da  $a_0$  ad  $a_n$ , pervengono al neurone  $k$  (dall'esterno; da altri neuroni); le attivazioni sono usualmente confinate nell'intervallo  $0 \div 1$ . Le attivazioni sono moltiplicate (pesate) con valori  $w$ . Nel neurone si sommano i prodotti  $a_i w_{ki}$ ; il risultato è trasformato con una funzione sigmoide, per lo più la logistica, che lo confina in un intervallo dato, anche operando in un modo assimilabile a quello di una funzione a soglia.

La figura 2 introduce un esempio di rete composta da neuroni artificiali. I nodi di *input*, qui numerati da 1 a 4, raccolgono le singole informazioni da inviare a tutti i nodi dello strato *hidden*, qui contraddistinti con gli indici da 5 a 7; questi sommano gli *input* ricevuti, ponderandoli opportunamente, quindi li trasformano tramite una funzione sigmoide e inviano il risultato a tutti i nodi dello strato *output*, indicati nel nostro esempio con 8 e 9; questi

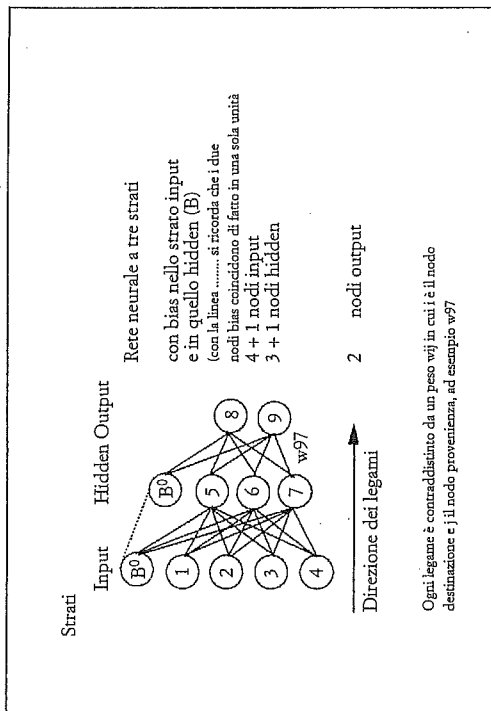


FIG. 2. Schema di una RNA.

ultimi nuovamente sommano gli *input* ricevuti, ponderandoli, quindi li trasformano tramite una funzione come sopra e li emettono quale risultato (con una eventuale ulteriore trasformazione lineare). La rete deve produrre in uscita un valore predefinito per ogni set di dati in *input*; tali valori di *output* atteso sono contenuti nell'insieme di dati su cui si fonda l'apprendimento (*training set*); la rete stessa, dopo l'apprendimento con cui si definiscono i pesi  $w$ , sarà verificata su un insieme di dati di controllo (*validation set*) e quindi applicata a dati via via nuovi. Gli *output* attesi, su cui la rete apprende, o comunque contenuti nel *validation set*, sono anche indicati con il nome di *target*.

Formalmente, siano:

$$A = \begin{bmatrix} w_{50} & w_{60} & w_{70} \\ w_{51} & w_{61} & w_{71} \\ w_{52} & w_{62} & w_{72} \\ w_{53} & w_{63} & w_{73} \\ w_{54} & w_{64} & w_{74} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} w_{80} & w_{90} \\ w_{85} & w_{95} \\ w_{86} & w_{96} \\ w_{87} & w_{97} \end{bmatrix}$$

Le matrici **A** e **B** sono costruite definendo opportunamente i pesi o para-

metri in accordo con le convenzioni e l'esempio della figura 2, con 4 nodi di *input*, più uno fittizio sempre pari ad 1 che serve per sviluppare i parametri o pesi  $w$  che operano come *bias* per ciascuno dei nodi *hidden*; 3 nodi *hidden*, di nuovo più uno fittizio che serve da base per i *bias* dei nodi *output*; 2 nodi *output*.

Con  $f(x) = 1/(1 + e^{-x})$  si può scrivere <sup>1</sup>

$$[1.2] \quad y = f(B[1, f(A[1, x^T]V])$$

in cui  $y = [\gamma_8 \gamma_9]^T$  è il vettore degli *output* e

$x = [x_1 x_2 x_3 x_4]^T$  è il vettore degli *input*; il valore 1 aggiunto all'inizio del vettore nella [1.2] è l'*input* costante per i nodi *bias*. Lo stesso si fa per lo stato *hidden*. La [1.2] definisce in modo completo una funzione a rete neurale del tipo di quelle qui utilizzate, come funzione vettoriale di vettori, nel nostro caso da  $R^4$  a  $R^2$ .

Il cosiddetto *bias*, rappresentato dal peso applicato all'*input* o all'*hidden* costante pari ad 1 (nell'esempio qui sopra: pesi  $w_{50}, w_{60}, w_{70}, w_{80}, w_{90}$ ) origina, come idea, dalle funzioni a soglia delle prime applicazioni neurali: in quei modelli un neurone trasmette o no un segnale a seconda che la somma in ingresso superi o no una soglia determinata (ma non necessariamente predeterminata). La funzione logistica approssima – per forma – una funzione a soglia del tipo discontinuo, avendo il pregio della continuità e derivabilità. Se  $f(x)$  è una funzione logistica (che ha punto di flesso in corrispondenza dell'ascissa  $x = 0$ ),  $f(x + a)$  ha punto di flesso spostato dall'ascissa 0 all'ascissa  $x = -a$ ;  $a$  è il *bias*.

La trasformazione non lineare è determinante; in sua assenza, le due matrici di pesi potrebbero essere tra loro moltiplicate producendo  $C = B \cdot A$ , riducendo a due (*input* ed *output*) gli strati della rete, ma rendendo non trattabili i problemi cosiddetti linearmente non separabili, che richiedono almeno tre strati. La determinazione dei pesi della RNA, vale a dire dei valori degli elementi di  $A$  e  $B$  sulla base dei quali sono calcolate le somme ponderate dei valori in ingresso che pervengono ai nodi *hidden* o di *output*, si fonda sulla minimizzazione dell'errore misurato come differenza tra i valori  $y$  di *output* che la RNA produce – errore misurabile prima dell'apprendimento, quando la rete è inizializzata con pesi determinati a caso (scelti in un intervallo pre-

fissato) o via via durante il processo di affinamento – e i valori proposti come *target* dai *pattern* del *training set*. Per ogni *pattern* (caso) si avrà quindi un vettore  $x$  di valori di *input* e un vettore  $t$  di risultati attesi o *target*. L'errore <sup>2</sup> da minimizzare è misurato dalla doppia sommatoria:

$$\sum_n \sum_k (t_k - y_k)^2$$

in cui l'indice  $n$  va da 1 al numero totale di *pattern* (somma rispetto a ciascun caso del *training set*) e l'indice  $k$  individua i singoli nodi *output*.

I pesi contenuti nelle due matrici, inizialmente fissati a caso, sono modificati normalmente con una correzione per ogni *pattern*, applicando la funzione via via ai vari casi del *training set*, anche scegliendoli non sempre nello stesso ordine. L'applicazione della RNA, per l'apprendimento, all'intero *training set* – con tante correzioni dei pesi quanti sono i *pattern* – può anche essere ripetuta migliaia di volte. La modificazione di ciascun peso  $w_{ij}$  avviene sulla base di una quota  $\epsilon$  (*learning rate*) dell'opposto della derivata dell'errore  $E = \sum (t_k - y_k)^2$  di ogni *pattern* rispetto al peso  $w_{ij}$  stesso. La quota  $\epsilon$  della derivata è aggiunta al valore precedente del peso che si sta correggendo; alla correzione è inoltre sommata una quota  $\alpha$  (*momentum*) della correzione precedente; scopo del *momentum* è il mantenimento della direzione e intensità del «movimento della correzione». L'algoritmo della *backpropagation* – Rumelhart e altri (1986) che, a loro volta, citano Le Cun (1985) e Parker (1985)

<sup>2</sup> La minimizzazione dell'errore, ottenuta misurando l'errore stesso come somma dei quadrati degli scostamenti tra output della RNA e valori originari o target, non è rilevante in termini di ipotesi adottate per la costruzione degli Agenti Artificiali Adattivi (AAA) utilizzati nei modelli sperimentali proposti in seguito. La RNA è chiamata a memorizzare e applicare, o a generare e applicare, una o più regole che determinano il comportamento di un singolo agente.

Se sono introdotte dallo sperimentatore, le regole possono essere il frutto di ipotesi con maggiore o minore grado di complessità, razionalità più o meno estesa, informazione completa o no, orizzonte temporale più o meno ampio, obiettivi riconducibili o no alla ricerca dell'estremo di una funzione. Se invece si richiede che gli AAA autosvilupolino le regole di comportamento, le caratteristiche delle regole dovranno essere interpretate *ex post*.

Nell'uno e nell'altro caso, la RNA con cui si costruisce l'AAA, tramite il processo di apprendimento fondato sulla minimizzazione prima indicata (processo svolto prima dell'esperimento se le regole sono predefinite o durante lo stesso, nel secondo caso), si trasforma in un sistema esperto che applica le regole stesse ai dati via via disponibili. Dunque la minimizzazione influenza soltanto la capacità della RNA di incorporare le regole in questione; esse, se sviluppate, dipendono dalle metodologie utilizzate per tale finalità (in questo lavoro, ad esempio, il metodo dei CT descritto nel paragrafo 5.1). In luogo di una RNA potrebbero tra l'altro essere utilizzati altri strumenti, tra cui i *classifier system*.

<sup>1</sup> Non tenendo conto della costante 1 per i nodi *bias*, molto più compattamente si avrebbe:

$$y = f(B \cdot f(Ax))$$

– o algoritmo di retropropagazione dell'errore (o gradiente semplificato), opera nel modo descritto.

## 2. Modelli di agenti in economia

La costruzione di modelli fondati su AAA (agenti artificiali adattivi, seguendo Holland e Miller, 1991) richiede lo sviluppo di nuovi strumenti. L'esigenza di costruire tale classe di modelli per effettuare simulazioni o esperimenti deriva dall'esigenza di consentire l'emergenza di non linearità nell'interazione tra agenti adattivi dotati di capacità di apprendimento; ciò limita la possibilità di impiegare tecniche riduzionistiche, in particolare con la costruzione di agenti rappresentativi (Kirman, 1992). Nel seguito si userà la dizione «esperimenti simulati» per indicare che, al di là della tradizionale simulazione, si vuole sottolineare l'aspetto innovativo dell'uso esplicito di AAA nei modelli. Queste analisi presentano forti differenze in termini di presupposti, organizzazione, costi, teorie cognitive, rispetto ai diffusi e consolidati risultati acquisiti dall'economia sperimentale. Hanno però anche punti forti di contatto, il principale dei quali è appunto l'emergere di risultati non lineari (Smith, 1994).

Un prerequisito qui adottato per gli esperimenti simulati è l'uso di modelli semplici, non solo nella direzione consueta della semplificazione delle microfondazioni dei modelli economici, ma soprattutto in quella dell'eliminazione di ipotesi forti relative alla razionalità ed alla capacità computazionale degli agenti<sup>3</sup>. Se possibile, la costruzione degli agenti deve essere tale da permettere allo sperimentatore di conoscerne in modo compiuto le regole di comportamento; in altri termini di conoscere a priori la «teoria del tutto» del sistema che sta sperimentando.

Introducendo in modo esplicito l'interazione tra gli agenti, di fatto assente nell'impostazione tradizionale dei modelli, conseguenze complesse, anche eventualmente non previste o non prevedibili, possono emergere dall'aggregazione non lineare di singole componenti elementari: lo strumento delle RNA, fondato sull'apprendimento e dotato di capacità di approssimazione di qualsiasi relazione funzionale, si rivela di grande utilità per la costruzione degli agenti intesi quali procedure di calcolo chiamate ad interagire.

<sup>3</sup> Quando si assume che gli agenti abbiano razionalità piena, non solo si attribuisce loro informazione completa e illimitata capacità computazionale, ma implicitamente anche la conoscenza del modello da cui discendono le conseguenze delle loro azioni. Come nota Sargent (1993), in questo modo si attribuiscono ad essi conoscenze maggiori di quelle a disposizione dell'econometrico che costruisce il modello.

## 3. Apprendimento, razionalità limitata e RNA

Nella costruzione degli agenti un riferimento fondamentale è alla teoria della razionalità limitata (Simon, 1964; Simon e al., 1992, anche per una selezione di scritti precedenti), con la conseguente esigenza di procedure di apprendimento (Arthur, 1990) e di conoscenza dell'azione degli agenti (Bourgin e al., 1991) isolati e nelle organizzazioni. La capacità di apprendere è cruciale in molte situazioni del mondo reale, in cui gli agenti devono adattare il loro comportamento ai cambiamenti dell'ambiente e alle conseguenze dell'azione degli altri agenti. Le RNA possono essere utili nel contesto descritto, in quanto permettono di costruire algoritmi che riproducono – almeno nei risultati – alcune delle caratteristiche dell'operare della mente umana (Kosko, 1992), con errori, irrazionalità, incoerenza, ma anche secondo regole il più possibile autosviluppate, esigendo come prerequisiti soltanto regole per l'apprendimento.

Alcuni dettagli relativi all'apprendimento: essendo i dati normalmente generati all'interno del modello durante l'esperimento, l'insieme su cui avviene l'apprendimento è aperto; la generazione dei dati e quindi l'apprendimento sono ripetuti per un ragionevole numero di cicli («giorni»), numero che non è però comparabile con quello dei cicli di apprendimento caratteristici di una normale applicazione di *backpropagation*. Ne consegue una ridotta operatività dei pesi della RNA, in conseguenza di un processo di sotto-adattamento.

Una soluzione è quella di ripetere l'apprendimento sui dati via generati (su tutti o su una parte di essi; ogni giorno o a intervalli regolari) sviluppando con ciò una forma mista di determinazione dei pesi della RNA: durante l'azione ed *off-line*, con ripetizioni che possono essere assimilate all'operato di un soggetto che riflette *ex post* sulle azioni compiute e sulle relative conseguenze.

È possibile individuare almeno tre modalità di costruzione di modelli economici e finanziari con l'uso di RNA. Le prime due sono relative a modelli fondati su agenti, mentre la terza non fa uso esplicito di agenti.

1) Modelli fondati su agenti che usano le RNA per formulare previsioni: sulla base di tali previsioni e di regole loro fornite dall'esterno gli agenti operano ed eventualmente affinano, con l'apprendimento, la capacità previsionale.

2) Modelli fondati su agenti le cui regole di comportamento siano implicitamente e autonomamente determinate dalle RNA, con l'apprendimento. L'uso principale è quello degli esperimenti in economia: introducendo modificazioni controllate dell'ambiente o influenzando le regole di decisione è possibile ricavare spiegazioni *plausibili* del funzionamento di meccanismi economici reali. Si tratta del campo qui sviluppato nei paragrafi 5 e seguenti.

3) Il terzo tipo di modelli è fondato sull'uso diretto delle RNA quali funzioni che producono un *output* da un *input*, interpolando i dati per generalizzarli e produrre previsioni. L'uso strettamente econometrico delle RNA va però al di là dell'ambito di questa nota.

#### 4. Il problema dell'interpretazione

Un problema cruciale è quello di individuare i meccanismi di funzionamento nei modelli costruiti con RNA; in altri termini, aprire la scatola nera della RNA. Le tecniche che seguono si applicano anche a RNA molto diverse, nelle finalità, da quelle impiegate nella costruzione di modelli con agenti; un esempio è quello dei sistemi esperti neurali (Gallant, 1993), costruiti incorporando una casistica nei pesi della rete.

##### 4.1. Esame delle derivate tra output e input della funzione a RNA

Considerando una RNA come una funzione che trasporta un vettore dallo spazio multidimensionale di *input* ad un vettore nello spazio multidimensionale di *output*, è naturale esaminare le derivate parziali di ogni elemento del vettore di *output* rispetto ad ogni elemento del vettore di *input*. Si tratta di derivate calcolate per punti, in quanto i nodi nascosti sono influenzati da tutti i valori di *input* e, a loro volta, i valori di *output* dipendono da tutti i nodi nascosti. Formalmente:

$$\frac{\partial O_n}{\partial I_m} = O_n (1 - O_n) \sum_{j=1}^K [w_{nj} H_j (1 - H_j) w_{jm}]$$

in cui  $O_n$  rappresenta un generico elemento di *output* e  $I_m$  un generico elemento di *input*, con  $K$  che indica il numero dei nodi nascosti «veri», nodi che sono globalmente  $K + 1$  tenendo conto del nodo di *bias*, numerato 0; l'indice della sommatoria va da 1 a  $K$ , escludendo appunto il nodo di *bias*;  $w_{nj}$  è il peso che collega il  $j$ -mo nodo *hidden* all' $n$ -mo nodo di *output*;  $H_j$  è l'attivazione del  $j$ -mo nodo *hidden*;  $w_{jm}$  è il peso che collega l' $m$ -mo nodo *input* al  $j$ -mo nodo *hidden*.

Per calcolare le derivate possiamo utilizzare valori convenzionali di *input* pari a 0.5, essendo normalmente il *range* di tali grandezze limitato all'intervallo da 0 a 1 nelle applicazioni con RNA; anche le grandezze di *output* sono limitate a tale intervallo, o a un intervallo più ristretto, ad esempio da 0.1 a 0.9, per facilitare l'apprendimento. Pertanto i valori delle derivate sono da leggersi in rela-

zione all'ampiezza di tali intervalli<sup>4</sup>. Nella maggior parte dei casi è però necessario calcolare le derivate per tutti i punti (casi o *pattern*) disponibili e quindi valutarne media e scarto quadratico medio. Ciò anche per aggirare i problemi che sorgono quando la struttura della funzione determini derivate nulle per alcuni punti, pur in presenza di una relazione causale, ad esempio ciclica.

##### 4.2. Un'euristica per estrarre regole da una RNA

L'obiettivo è quello di individuare regole che: 1) si fondino sul minor numero possibile di variabili esplicative; 2) siano valide indipendentemente dai valori assunti dalle variabili escluse da ogni regola; 3) non contengano né variabili, né operatori logici o aritmetici superflui. Ci riferiamo in particolare all'impostazione di Gallant (1993). Lo scopo, in quel caso, è estrarre regole da RNA che abbiano incorporato conoscenza da una casistica, tanto da costituire sistemi esperti neurali<sup>5</sup>. Il lavoro di Gallant è specificamente riferito a reti con *input* ed *output* binari; le idee di fondo sono però utilizzabili anche con valori continui. In particolare, sulla base dei principi sopra enunciati, si può ricorrere all'idea di costruire le regole in modo additivo, aggiungendo variabili (sulla base ad esempio dei criteri di scelta qui in seguito introdotti) sino a che la regola divenga valida. L'euristica proposta è introdotta tramite un esempio, utile anche con riferimento al calcolo delle derivate.

Costruiamo un campione artificiale di 100 casi, con le variabili di *input*  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  uniformemente distribuite in modo casuale nell'intervallo 0-1; le variabili di *output*  $O_A$ ,  $O_B$  e  $O_C$  sono generate con:

$$\begin{aligned} O_A &= 2I_1 + I_2 - 3I_3 \\ O_B &= -I_2 + I_3 \\ O_C &= I_2 I_3 \end{aligned}$$

<sup>4</sup> È comunque agevole definire le trasformazioni necessarie per ricondurre le derivate nella scala di valori del problema originario.

<sup>5</sup> Un sistema esperto è un programma che incorpora le competenze di un esperto su un particolare dominio di conoscenza. I sistemi esperti rappresentano uno dei maggiori successi della intelligenza artificiale. Sono costruiti sia utilizzando direttamente linguaggi ad alto livello, di impostazione dichiarativa come il LISP o il PROLOG, o imperativi; sia con appositi prodotti in grado di gestire in modo semplificato grandi insiemi di regole e di fatti cui applicarle. Sono di regola molto costosi, sia nella prima realizzazione, sia nella successiva manutenzione. Un'alternativa interessante dal punto di vista del costo è quella dell'uso di RNA cui si facciano apprendere casistiche di esempi (reali o tratti dalla letteratura): i problemi in questo caso sono quelli della affidabilità del sistema e della possibilità di superare la diffidenza dell'utente verso una «scatola nera» qual è la RNA. Per questo, ha molta importanza l'estrazione *ex post* di regole.

Con 2 nodi nascosti, sulla base di 200 epoche, ciascuna consistente nell'esame dei 100 casi in ordine casuale, si ottengono le seguenti spiegazioni della variabilità degli *output*. La valutazione di  $R^2$ , coefficiente di determinazione, è riferita a ciascuno dei tre *output*, indicati semplicemente con A, B e C. Inoltre, si fornisce una valutazione grezza dell'errore percentuale, ottenuta rapportando gli scostamenti, tra valori veri e stime, ai valori veri (per evitare errori di divisione per zero quando uno specifico valore sia nullo, si divide il totale dei numeratori per il totale dei denominatori).

2 nodi nascosti.  $R^2$ : A 0.803, B 0.868, C 0.897; errore complessivo 32.68%.

Il risultato non è particolarmente soddisfacente in termini di errore percentuale; introduciamo ora le derivate calcolate sulla base di valori convenzionali di *input* pari a 0.5. Il solo valore con un significato chiaro è  $O_C$  rispetto a  $I_1$ , correttamente prossimo a zero. Gli altri valori non sono di agevole lettura, coerentemente con il risultato non soddisfacente in termini di errore complessivo.

| $\delta O/\delta I$ | $I_1$  | $I_2$  | $I_3$ |
|---------------------|--------|--------|-------|
| $O_A$               | 0.188  | 0.301  | 0.515 |
| $O_B$               | -0.212 | -0.476 | 0.483 |
| $O_C$               | -0.026 | 0.658  | 0.594 |

Con 3 nodi nascosti, sempre con lo stesso numero di cicli di apprendimento, si ottiene un miglioramento nell'errore e nei valori di  $R^2$ .

3 nodi nascosti.  $R^2$ : A 0.939, B 0.940, C 0.876; errore complessivo 11.33%.

Anche con riferimento alle derivate si rileva una maggior capacità di distinguere quelle che si confondono con lo zero da quelle non nulle.

| $\delta O/\delta I$ | $I_1$  | $I_2$  | $I_3$  |
|---------------------|--------|--------|--------|
| $O_A$               | 0.465  | 0.214  | -0.464 |
| $O_B$               | -0.031 | -0.500 | 0.471  |
| $O_C$               | 0.026  | 0.682  | 0.608  |

Incrementando ancora il numero dei nodi nascosti:

4 nodi nascosti.  $R^2$ : A 0.944, B 0.944, C 0.868; errore complessivo 11.17%.

| $\delta O/\delta I$ | $I_1$ | $I_2$  | $I_3$  |
|---------------------|-------|--------|--------|
| $O_A$               | 0.437 | 0.203  | -0.455 |
| $O_B$               | 0.015 | -0.489 | 0.517  |
| $O_C$               | 0.015 | 0.613  | 0.699  |

Un buon compromesso tra complessità della rete e risultati si ottiene con 3 nodi nascosti. Nel caso in cui si operi su un problema reale, il consiglio pratico è quello di incrementare il numero dei nodi nascosti sino ad ottenere una sufficiente stabilizzazione dei significati delle derivate.

Una controprova è comunque sempre opportuna: qui calcoliamo le derivate in corrispondenza di ciascuno dei casi (100) disponibili e quindi esaminiamo media e scarto quadratico medio (qui di seguito riportato tra parentesi, accanto ad ogni media) delle 100 derivate ottenute. In questa applicazione simulata, la controprova conferma i risultati già visti.

| $\delta O/\delta I$ | $I_1$          | $I_2$          | $I_3$          |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|
| $O_A$               | 0.357 (0.079)  | 0.161 (0.057)  | -0.374 (0.077) |
| $O_B$               | -0.020 (0.024) | -0.394 (0.106) | 0.389 (0.119)  |
| $O_C$               | 0.017 (0.028)  | 0.426 (0.263)  | 0.453 (0.229)  |

Passiamo ora all'esame dei parametri o pesi della nostra RNA con tre nodi nascosti, indicati con  $H_4$ ,  $H_5$ ,  $H_6$  ( $I_0$  è sempre il nodo *bias*, sia per lo strato di *input*, sia per quello *hidden*); sono posti uguali a zero i pesi che non eccedono la soglia di  $\pm 0.3$  (intervallo dei valori casuali inizialmente attribuiti ai pesi).

La ricostruzione del legame tra una grandezza di ingresso ed una di uscita è ardua, per la caratteristica sub simbolica o distribuita della rappresentazione della conoscenza, implicita nelle RNA. Si veda la figura 3: è agevole individuare un legame tra  $I_1$  e  $O_A$  seguendo la strada  $I_1 \rightarrow H_5 \rightarrow O_A$ ; è invece impossibile individuare un esplicito legame che, attraverso i nodi nascosti, colleghi  $I_2$  ad  $O_A$ , anche se sappiamo che il legame esiste e soprattutto che la RNA ne tiene conto.

Per superare tali difficoltà e disporre di una utile base, da utilizzare, congiuntamente alla lettura delle derivate, per lo sviluppo dell'euristica qui cercata, si introduce una vistosa semplificazione, consistente nella moltiplicazione delle due matrici prima viste, eliminando in entrambi i casi la riga relativa al *bias*.

Come dimensioni, abbiamo:

(*input #*, *hidden #*)  $\times$  (*hidden #*, *output #*) che dà (*input #*, *output #*).

Tale matrice, qui denominata *general weight matrix* (GWM), non ha significato numerico, ma qualitativo, essendo ignorata la trasformazione non lineare relativa allo strato nascosto. Nel nostro caso, con 3 nodi *hidden*, si ha:

|       | $O_A$ | $O_B$ | $O_C$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $I_1$ | 7.5   | -0.1  | 1.4   |
| $I_2$ | 3.9   | -9.6  | 11.0  |
| $I_3$ | -7.6  | 9.8   | 13.7  |

$$I_3 \quad R^2 = 0.094; \quad I_3, I_2 \quad R^2 = 0.880$$

Anche in questo caso, senza introdurre  $I_1$ , abbiamo un risultato equivalente, o leggermente migliore, di quello ottenuto con i 3 valori in ingresso <sup>6</sup>.

#### 4.3. Le interazioni in modelli fondati su agenti

Gli strumenti di analisi sin qui introdotti, utili per analizzare il funzionamento di una singola RNA, non sono invece adatti per interpretare le conseguenze che emergono in termini complessivi dall'azione di una collettività di agenti interattivi: non si possono in tal caso proporre strumenti operativi come quelli prima elencati, anche se non è escluso che alcune strade possano essere riferite anche a collettività di AAA rappresentati da RNA. Ad esempio, si potrebbe estendere il concetto di «derivata» a modelli fondati su gruppi di agenti e verificare i cambiamenti dei risultati aggregati modificando l'azione di uno solo dei gruppi per volta, al fine di misurare quale sia la popolazione che maggiormente influenza i risultati complessivi.

Qui però ci si limita ad alcune considerazioni generali, in particolare sulla maggior difficoltà che si riscontra nell'interpretazione di comportamenti collettivi piuttosto che individuali. Il problema è assai prossimo, se non coincidente, con quello dell'individuazione dei legami tra genotipo e fenotipo. Può essere impossibile prevedere quale fenotipo deriverà da un genotipo costruito artificialmente, come risulta nei lavori sulla *artificial life* (Langton, 1989; Langton e al., 1992). Esempi di questo tipo di modelli sono presenti in Fontana (1992), Lindgren (1992), Ray (1992).

L'idea centrale per la nostra analisi è che il comportamento del singolo agente è semplice, ma adattivo, emergendo la complessità dall'interazione. È soprattutto in questo contesto che possiamo verificare la comparsa di conseguenze del tutto inattese rispetto alle scelte iniziali di costruzione del modello.

<sup>6</sup> Una analisi ulteriore da compiere è relativa alle relazioni reciproche tra le grandezze introdotte. Una spia dell'opportunità di questo controllo, nel caso di  $O_C$ , sta nel rilevante incremento di  $R^2$  che segue all'introduzione della seconda grandezza in input. Una verifica della non additività delle due variabili in ingresso si ottiene valutando l'output  $O_C$  della RNA con tutte le grandezze in ingresso poste al loro valore minimo. Si ripete il calcolo ponendo  $I_3$  pari al massimo e si valuta l'incremento di  $O_C$ , che risulta molto modesto. Lo stesso fenomeno si presenta ponendo al massimo  $I_2$  invece di  $I_3$ ; proponendo simultaneamente  $I_2$  e  $I_3$  al massimo,  $O_C$  balza al proprio valore massimo; pertanto le due grandezze non operano in modo additivo. La stessa prova, effettuata ad esempio nei confronti di  $O_B$  mette invece ben in luce la indipendenza delle due variabili esplicative  $I_3$  e  $I_2$ .

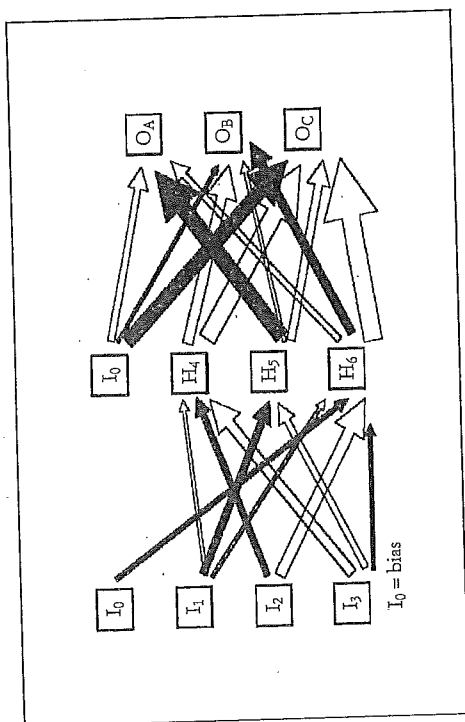


FIG. 3. La struttura semplificata della RNA; le frecce, dallo strato input a quello *hidden* e da quello *input* a quello *output*, sono proporzionali ai valori assoluti dei pesi (freccia vuota = peso negativo).

Possiamo ora introdurre la creazione delle regole, procedendo in modo additivo. Con riferimento ad  $O_A$ , facciamo operare la RNA costruita sulla base dell'apprendimento precedente con i soli valori di  $I_3$ , poi  $I_2$  e  $I_1$ , infine con tutte e tre le variabili (situazione ordinaria). L'ordine è scelto partendo dai pesi della GWM vista, coerente con l'indicazione proveniente dall'esame delle derivate, anche se con qualche incertezza sull'ordine tra le prime due variabili. Quando si usa in *input* il solo valore di  $I_3$ , le variabili  $I_1$  e  $I_2$  sono introdotte con valore costante intermedio tra il minimo e il massimo presentato alla RNA nel *training set* precedentemente utilizzato.

$O_A$  spiegato additivamente con:

$$I_3 \quad R^2 = 0.434; \quad I_3, I_1 \quad R^2 = 0.824; \quad I_3, I_1, I_2 \quad R^2 = 0.939$$

$O_B$  spiegato additivamente con:

$$I_3 \quad R^2 = 0.492; \quad I_3, I_2 \quad R^2 = 0.939$$

Senza introdurre  $I_1$ , esaminando  $R^2$  verificiamo che il risultato è equivalente a quello ottenuto con 3 *input*, vedere sopra.

$O_C$  spiegato additivamente con:

lo. Le «lezioni» utili per interpretare la realtà che possiamo trarre da queste analisi stanno sia nella «scoperta» di micromeccanismi che spieghino il comportamento individuale, sia nella comprensione delle modalità con cui tali micromeccanismi, anche se molto semplici, determinano conseguenze complesse nell'interazione tra agenti.

## 5. Modelli fondati su agenti

Si introduce una tecnica sviluppata da chi scrive al fine di consentire la costruzione il più possibile oggettiva degli agenti, consentendo al contempo un buon controllo dei comportamenti, per rispondere ai bisogni interpretativi delineati nel paragrafo 4.3. Si tratta della tecnica dei *cross target* (CT), nome che prende a prestito dalla letteratura sulle reti neurali la dizione di *target* come valore base per l'apprendimento. I dati di *input* provengono da cicli precedenti di azione, oppure dall'ambiente, in particolare in «risposta» ai comportamenti della rete. Questo è lo specifico campo delle *econet* (Parisi e al., 1990).

I dati su cui gli agenti fondano l'apprendimento derivano dallo sviluppo della coerenza interna tra due tipi di congetture da essi formulate: a proposito delle azioni da intraprendere e, simmetricamente, circa gli effetti di quelle azioni. Sulla base di tale semplice coerenza possono emergere comportamenti anche molto sofisticati.

È però soprattutto utile sviluppare modelli in cui interagiscano più agenti e soprattutto di tipi diversi (popolazioni), per avvicinare gli esperimenti alla complessità del mondo reale. Un secondo gradino è quello di modelli in cui l'interazione tra gli agenti influenza endogenamente l'ambiente. Ad esempio, in un modello in cui gli agenti compiano atti di scambio, i prezzi possono essere determinati come conseguenza dell'azione degli agenti stessi. Il terzo gradino è quello di modelli in cui gli agenti, essendo interattivi, si influenzano direttamente, sulla base delle azioni compiute. In tali modelli si può evitare di utilizzare equazioni aggregate. Si tratta della situazione più complessa e realistica: in molte situazioni reali ogni agente regola le proprie azioni sulla base di ciò che sa a proposito del comportamento di un piccolo insieme di altri agenti e ciò è sufficiente a garantire che il sistema nel suo complesso funzioni.

### 5.1. Il metodo dei *cross target* (CT)

La tecnica CT è sviluppata per costruire AAA senza fare necessariamente ricorso a regole economiche a priori. Si consideri lo strato di *output* della

RNA che rappresenta un agente, suddiviso in due parti, caratterizzate come: 1) nodi di uscita relativi ad azioni da compiere (congetture in merito); 2) nodi di uscita relativi agli effetti di tali azioni (sempre: congetture in merito). Con i CT, sia i *target* necessari per l'apprendimento della rete dal lato delle azioni, sia quelli necessari dal lato degli effetti, sono determinati in modo incrociato. I primi sono costruiti in coerenza con gli *output* della rete concernenti gli effetti (lato 2), allo scopo di sviluppare la capacità di decidere azioni che producano i risultati attesi. I secondi sono costruiti in coerenza con gli *output* della rete relativi alle congetture di azione (lato 1), con lo scopo di sviluppare la capacità dell'agente di stimare gli effetti delle azioni che sta decidendo.

L'idea guida è che un agente economico sviluppi con l'apprendimento la capacità di valutare in modo coerente: quale azione deve compiere per ottenere un risultato specifico; quali conseguenze derivano da un'azione data. La tecnica dei CT pone quindi al centro dell'attenzione il meccanismo di apprendimento con lo scopo essenziale di condurre esperimenti senza il sovraccarico di troppe ipotesi economiche a priori (Terna, 1991, 1992a, 1992b, 1993a, 1993b). Si può verificare che i CT possono riprodurre il comportamento di soggetti economici sulla base di un apparato interno spesso elementare o «ingenuo», ma con risultati che dall'esterno appaiono complessi. Per un osservatore, questo tipo di AAA apparentemente opera con piani e obiettivi, mentre internamente non ha nulla che possa essere riferito a tali entità. Le capacità richieste all'agente sono in linea con le caratteristiche proprie dei modelli a razionalità limitata, in quanto a *set* informativo e capacità computazionali.

In una RNA a tre strati, definiamo dunque gli *output* suddividendoli: 1) da un lato, in azioni che il soggetto compie o meglio congettura di compiere; 2) dall'altro, in congetture in merito agli effetti di quelle azioni. La figura 4 descrive un AAA che agisce e apprende all'interno di uno schema CT. L'elemento centrale dell'algoritmo, che può essere interpretato come strumento di costruzione di modelli di comportamento senza uso di ottimizzazione, è una RNA, ma la costruzione – forse più complessa e meno neutrale – potrebbe anche fondarsi su altre metodologie.

L'azione e l'apprendimento si svolgono in quattro fasi ogni «giorno»; un giorno è la somma degli eventi necessari per realizzare un ciclo completo di produzione degli *output*, valutazione degli errori, retropropagazione degli stessi, correzione dei pesi o parametri della RNA. I pesi sono all'inizio determinati a caso, equidistribuiti in un dato intervallo. Le quattro fasi sono le seguenti.

1) *Output* della RNA: sulla base dei valori di *input* e dei pesi (pesi con valori in quel particolare «giorno», essendo l'apprendimento continuamente

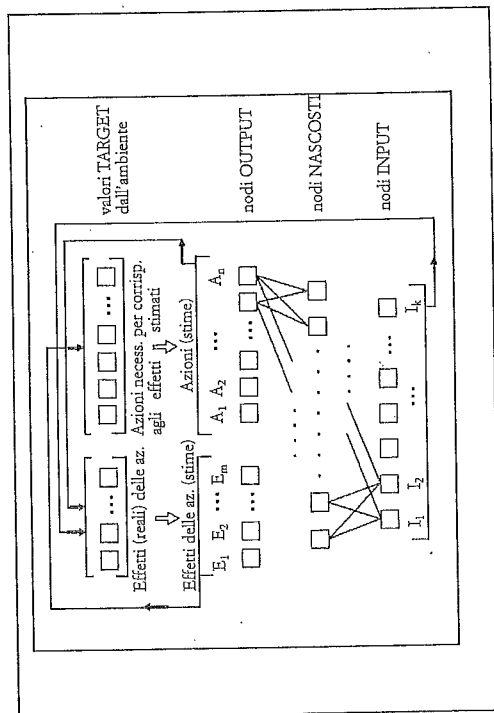


FIG. 4. Metodo del *cross target*: interpretazione della RNA sottostante.

ripetuto) la RNA valuta (fa congetture su) le azioni da compiere (lato destro della figura 4) e gli effetti di tali azioni (lato sinistro della figura 4).

2) *Target* per il lato sinistro della figura: i *target*, o valori che la rete deve imparare a riprodurre, per quel che riguarda le congetture sugli effetti sono costruiti sulla base delle azioni decise nell'altro lato della RNA. In questo modo le valutazioni sugli effetti diventano (tendono a diventare) coerenti con le valutazioni sulle azioni.

3) *Target* per il lato destro della figura: le differenze tra *target* e *output* della rete misurate nella fase 2) possono essere interpretate in modo inverso, come punto di partenza per la modificazione delle azioni al fine di avvicinarle alle congetture sugli effetti. Dunque il processo di avvicinamento è duplice: dagli effetti verso le azioni e viceversa, costruendo appunto i *target* in modo incrociato.

Essendo spesso indeterminate le formule inverse necessarie per la costruzione dei *target* delle azioni, le correzioni sono distribuite in modo casuale tra tutti i *target* da costruire; inoltre, se più correzioni si riferiscono ad uno stesso *target*, si prende in considerazione soltanto la maggiore in modulo.

4) *Backpropagation*: si effettua infine l'apprendimento, correggendo i pesi della rete al fine di ottenere stime di effetti più prossime alle conseguenze delle azioni congeturate e congetture di azione più coerenti con le stime sugli effetti.

Con una opportuna variabilità in *input*, si ripetono le quattro fasi indicate per più cicli o «giorni», con un adattamento continuo della rete alle modificazioni ambientali. Analizzando dopo ogni «giorno» le matrici dei pesi, si rileva che la matrice che collega i nodi *input* a quelli *hidden* si modifica marginalmente, mentre il cambiamento più rilevante si concentra nella matrice che collega i nodi *hidden* a quelli *output*. La rete è quasi certamente sotto-adattata (vedere il paragrafo 3) e di conseguenza l'agente simulato sviluppa una capacità solo locale di agire nell'ambiente.

Si può indicare l'apprendimento presentato sopra come apprendimento a breve termine, individuando per contro anche un apprendimento a lungo termine o apprendimento ripetuto, in analogia con la distinzione tra memoria a breve termine e memoria a lungo termine: 1) la fase di apprendimento e azione sin qui esaminata produce agenti che modificano continuamente i propri pesi, adattandosi in modo locale ai cambiamenti dell'ambiente; 2) *ex post* è possibile introdurre un nuovo apprendimento, sulla base dei dati storici ottenuti da quanto è via via accaduto durante la fase precedente; ne deriva una RNA in grado di reagire correttamente, senza più modificare i pesi, a cambiamenti di rilievo che intervengano nell'ambiente. Il secondo tipo di apprendimento può avvenire anche periodicamente, su un breve tratto di dati (ad esempio, ogni 50 giorni sui precedenti 100); oppure su un campione dei dati storici.

Con i CT si ottengono agenti che agiscono sulla base della coerenza interna prima delineata. Ciò è sufficiente a determinare lo sviluppo (autonomo) di micromecanismi capaci, separatamente o congiuntamente, di determinare azioni complesse, in analogia a quanto illustrato nella letteratura sui *robot* connessionisti (Connell 1990).

Per affinare l'utilità dei CT nella conduzione di esperimenti economici, offrendo al contempo agli sperimentatori strumenti per il controllo e la regolazione degli agenti, si introducono alcune sofisticazioni del metodo.

1) Introduzione di *obiettivi esterni* (EO), per influenzare le stime degli effetti, come sopra definiti.

2) Introduzione di *proposte esterne* (EP), per influenzare le congetture relative alle azioni, sempre come sopra definite.

Gli EP e gli EO sono *target* esterni: gli EO sostituiscono quelli costruiti in modo incrociato, che sono però comunque calcolati al fine di disporre delle valutazioni necessarie per le correzioni dal lato delle azioni; invece gli EP rappresentano uno dei *target* a volta a volta disponibili per l'apprendimento dal lato delle azioni, tra cui è scelto il maggiore in modulo.

## 5.2. Un esperimento sul movimento<sup>7</sup>

Preliminarmente si introduce un esperimento sui movimenti di agenti che cercano il cibo. Su un piano con coordinate  $(x, y)$ , il soggetto è inizialmente in  $(10, 10)$ , con il cibo in  $(0, 0)$ . La posizione del cibo è fissa. La RNA che simula il soggetto ha in *input*:

$X(t-1)$ , posizione<sup>8</sup> nella direzione  $x$  al tempo  $t-1$ ;  
 $Y(t-1)$ , posizione nella direzione  $y$  al tempo  $t-1$ ;  
 $dX(t-1)$ , movimento nella direzione  $x$ , al tempo  $t-1$ , con limite  $\pm 1$ ;  
 $dY(t-1)$ , movimento nella direzione  $y$ , al tempo  $t-1$ , con limite  $\pm 1$ .

Le coordinate di posizione possono anche essere interpretate come distanza, misurata in coordinate rettangolari, del soggetto dal cibo.

Utilizzando la terminologia dei CT, la RNA produce come *output* due congetture relative agli effetti e due relative alle azioni. Le congetture relative agli effetti sono:

$$X(t), Y(t).$$

Le congetture relative agli effetti sono:  
 $dX(t), dY(t)$ , con tutti i simboli di *output* che hanno lo stesso significato degli *input*.

I *target* sono:

$$\begin{aligned} X'(t) &= X(t-1) + dX(t) \\ Y'(t) &= Y(t-1) + dY(t) \end{aligned}$$

$dX'(t) = dX(t) + X(t) - X'(t)$ , che è l'azione corretta per ottenere  $X(t)$ , incrementando  $dX(t)$  se  $X(t) - X'(t) > 0$  e diminuendolo nel caso opposto.  
 $dY'(t) = dY(t) + Y(t) - Y'(t)$ , come sopra.

Introducendo un EO dal lato degli effetti, possiamo fare in modo che il soggetto operi per ridurre la distanza dal cibo, ad esempio al 75% (obiettivo non necessariamente raggiungibile) di quella del passo precedente. Si noti

<sup>7</sup> Questo esperimento, come i successivi, è presentato con maggiore approfondimento in Beltratti e al. (1995).

<sup>8</sup> Più precisamente, in questo modello in input compaiono i target individuati nel ciclo precedente, con il significato di misure esatte.

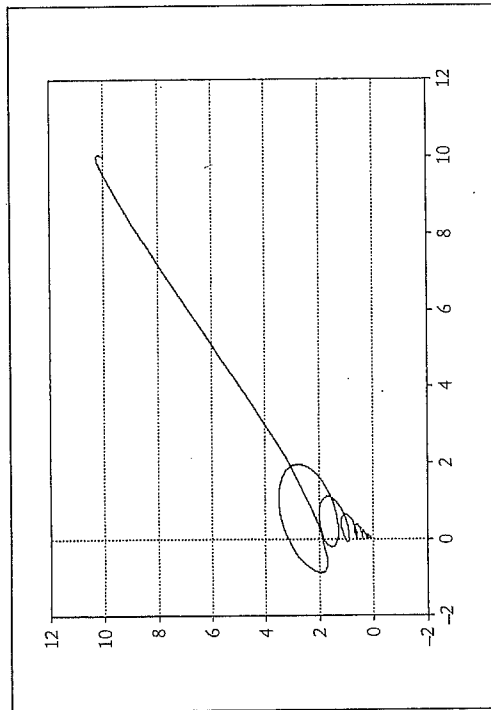


Fig. 5. Movimento verso il cibo, con EO.

che comunque non si danno indicazioni sul movimento da compiere, ma solo sul risultato. L'effetto è quello della figura 5.

Nella figura 6 il caso presentato è lo stesso della figura 5, ma con l'effetto di un prolungato apprendimento ripetuto svolto alla fine del periodo (vedere il paragrafo precedente). L'agente simulato raggiunge il cibo, muovendosi direttamente nella giusta direzione, anche se con qualche realistica incertezza.

Possiamo ora produrre, sulla base di quanto esposto nel paragrafo 4.2 le matrici GWM degli agenti descritti nelle figure 5 (apprendimento a breve termine) e 6 (apprendimento a lungo termine o ripetuto).

La matrice GWM della figura 5 è la seguente; le variabili *input*, sulle righe, sono i *target* del ciclo precedente; sulle colonne sono riportati le variabili *output*.

| Input      | Output     | $X(t)$  | $Y(t)$  | $dX(t)$ | $dY(t)$ |
|------------|------------|---------|---------|---------|---------|
| $X'(t-1)$  | $X'(t-1)$  | -0.1035 | -0.0171 | 0.0330  | 0.0017  |
| $Y'(t-1)$  | $Y'(t-1)$  | -0.0406 | -0.0308 | -0.0449 | -0.0213 |
| $dX'(t-1)$ | $dX'(t-1)$ | 0.0381  | 0.0245  | 0.0144  | -0.0125 |
| $dY'(t-1)$ | $dY'(t-1)$ | -0.0140 | -0.0227 | 0.1088  | 0.0290  |

Con l'apprendimento a breve termine si dispone di una quantità molto li-

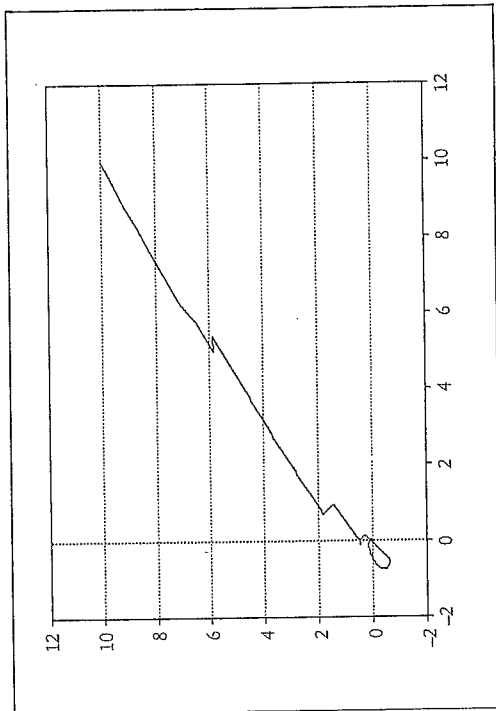


Fig. 6. Movimento verso il cibo, dopo l'apprendimento ripetuto.

mitata (200 in questo caso) di correzioni di pesi e quindi si determinano legami «leggeri» tra ogni *input* e ogni *output*. Passando (figura 6) al lungo termine, o apprendimento ripetuto, i legami tra *input* e *output* diventano «pesanti».

| Output |            | $X(t)$   | $Y(t)$   | $dX(t)$  | $dY(t)$ |
|--------|------------|----------|----------|----------|---------|
| Input  | $X'(t-1)$  | -16.9111 | -5.7756  | 7.2730   | 40.0658 |
|        | $Y'(t-1)$  | -8.3577  | -1.6650  | 6.1658   | 20.0175 |
|        | $dX'(t-1)$ | -75.9463 | -46.7457 | 182.9647 | 81.7869 |
|        | $dY'(t-1)$ | -71.1736 | -46.5281 | 99.4387  | 42.3390 |

Per interpretare questa seconda matrice, estraiamo le regole implicitamente sviluppate con l'apprendimento a lungo termine, sempre seguendo quanto esposto nel paragrafo 4.2. Osservando la matrice, si nota che gli *output* relativi agli effetti (stima della posizione sul piano) sono influenzati principalmente dagli *input* relativi alle azioni (che sono sfasati di un passo); una interpretazione: l'agente ha «memorizzato» la sequenza dei movimenti necessari per raggiungere l'obiettivo e la riproduce passo dopo passo; la valutazione della posizione può dunque ben fondarsi sul movimento precedente alla mossa corrente.

Tab. 1. Derivate su punto medio (MPD) e derivate medie (MD), quest'ultime con il relativo s.g.m. indicato tra parentesi

| Variabile di output $X(t)$  |           | $Y'(t-1)$      | $dX'(t-1)$     | $dY'(t-1)$     |
|-----------------------------|-----------|----------------|----------------|----------------|
| input                       | $X'(t-1)$ | 0.008          | 0.009          | 0.028          |
|                             | MD        | -0.009 (0.063) | -0.144 (0.530) | -0.127 (0.558) |
| Variabile di output $Y(t)$  |           |                |                |                |
| input                       | $X'(t-1)$ | 0.003          | 0.003          | 0.010          |
|                             | MD        | -0.004 (0.027) | -0.128 (0.461) | -0.127 (0.494) |
| Variabile di output $dX(t)$ |           |                |                |                |
| input                       | $X'(t-1)$ | 0.000          | 0.064          | 0.092          |
|                             | MD        | -0.033 (0.190) | 0.315 (0.831)  | -0.127         |
| Variabile di output $dY(t)$ |           |                |                |                |
| input                       | $X'(t-1)$ | 0.019          | 0.088          | 0.003          |
|                             | MD        | 0.040 (0.081)  | 0.140 (0.202)  | 0.041 (0.184)  |

Per approfondire l'analisi, introduciamo nella tabella 1 le derivate tra valori di *output* e valori di *input*. Derivate calcolate – come visto nel paragrafo 4.1 – sia in relazione a punti medi ipotetici pari a 0.5 nella scala degli *input* della RNA e indicate con MPD (derivate su punto medio), sia calcolate in corrispondenza di ognuno dei casi rilevati; valutazioni, queste ultime – di cui si elaborano media e scarto quadratico medio – denominate MD (derivata media).

Si possono ora ricercare le regole implicite dell'AAA. In un esercizio CT, a differenza di quanto esposto in 4.4, i valori  $R^2$  non sono di per sé rilevanti e quindi non vengono calcolati. Per applicare l'euristica la proposta, si definisce artificialmente il massimo valore possibile di  $R^2$ , da confrontare con i valori che si possono via via ottenere utilizzando sottinsiemi delle variabili di ingresso. Il valore  $R^2$  in questione è  $R^2 = 1$ , corrispondente al risultato che si otterrebbe applicando la RNA ad un *validation set* di casi con *target* costruiti esattamente con gli *output* della RNA stessa<sup>9</sup>. Seguendo l'analisi svolta sulla GWM e sui valori delle derivate, si adotta la sequenza:  $dX(t-1)$ ,  $dY(t-1)$ ,  $X(t-1)$ ,  $Y(t-1)$ .

La ricostruzione di  $X(t)$ , ottenuta limitando gli *input*, dà i risultati seguenti in termini di  $R^2$ :

<sup>9</sup> Una soluzione alternativa, utilizzata nell'appendice B, è quella di determinare  $R^2$  confrontando gli *output* della rete con i target su cui si è svolto l'apprendimento ripetuto.

### 5.3. Regolarità economiche in modelli con un solo agente

Trattiamo il tema dello sviluppo di regolarità economiche in modelli con un solo agente, mediante il metodo dei CT, introducendo due esempi di semplici meccanismi di comportamento autosviluppati: 1) la reazione di un consumatore a cambiamenti nei prezzi; 2) la manifestazione dell'avversione al rischio in un agente che opera in borsa.

#### 5.3.1. Reazione di un consumatore a cambiamenti nei prezzi

Il soggetto formula due congetture indipendenti, che devono risultare coerenti in termini di CT sulla base di un unico *input*, il prezzo  $p_a$  (esogeno e modificato sulla base di una funzione ciclica, più una componente casuale). Le congetture sono: la quantità  $q_a$  del bene  $C_a$  da acquistare; la spesa  $x$ . I *target* incrociati si costruiscono in modo semplice con:

$$\begin{aligned} x' &= p_a \cdot q_a \\ q'_a &= q_a + (x - x')/p_a = x'/p_a \end{aligned}$$

in cui, da un lato,  $x'$  è la vera spesa coerente con la decisione  $q'_a$ ; dall'altro lato,  $q'_a$  è la decisione giusta se si vuole acquistare la quantità di  $A$  coerente con la congettura di spesa  $x$ . Se  $x' < x$ , la valutazione di  $q_a$  deve essere incrementata della misura  $(x - x')/p$  e viceversa.

Nella figura 7 si rilevano i prezzi e le quantità congetturate ( $q_a, g$ ) per 100 giorni di azione e apprendimento (il campione riportato è pari al 10% dell'intero esperimento, con scelta a distanze regolari). Si rileva che l'AAA ha sviluppato la capacità di reagire a modificazioni di prezzo, attenuandone gli effetti sulla spesa con la correzione parziale della quantità; ne deriva un comportamento che sembra seguire una funzione di domanda, prodotta autonomamente, senza ottimizzazione.

Il micromecanismo sottostante opera nel modo seguente. Supponiamo che il pezzo aumenti; la RNA tende - soprattutto all'inizio dell'apprendimento, ma anche in seguito in presenza di sotto-adattamento - a fornire risposte che si modificano molto lentamente e di conseguenza la congettura sulla spesa risulterà sbagliata per difetto e dovrà essere corretta in aumento; reciprocamente, la congettura sulla quantità risulterà troppo elevata per essere coerente con la stima dell'effetto spesa e sarà quindi ridotta. Le due correzioni avvicinano a zero l'errore; contemporaneamente però il prezzo cambia, determinando correzioni successive, che seguono le modalità indicate, con gli stes-

| Variabili in input            | R <sup>2</sup> |
|-------------------------------|----------------|
| $dX'(t-1)$                    | -0.357         |
| $dX'(t-1), dY'(t-1)$          | 0.121          |
| $dX'(t-1), dY'(t-1), X'(t-1)$ | 0.940          |

La ricostruzione di  $Y(t)$  dà:

| Variabili in input            | R <sup>2</sup> |
|-------------------------------|----------------|
| $dX'(t-1)$                    | -0.304         |
| $dX'(t-1), dY'(t-1)$          | 0.588          |
| $dX'(t-1), dY'(t-1), X'(t-1)$ | 0.980          |

Un primo commento: i dati relativi al movimento precedente sono determinanti, ma solo se considerati congiuntamente; un buon funzionamento della RNA richiede però la presenza della coordinata spaziale  $X$ .

La ricostruzione di  $dX(t)$  dà:

| Variabili in input            | R <sup>2</sup> |
|-------------------------------|----------------|
| $dX'(t-1)$                    | 0.758          |
| $dX'(t-1), dY'(t-1)$          | 0.849          |
| $dX'(t-1), dY'(t-1), X'(t-1)$ | 0.985          |

La ricostruzione di  $dY(t)$  dà:

| Variabili in input            | R <sup>2</sup> |
|-------------------------------|----------------|
| $dX'(t-1)$                    | 0.915          |
| $dX'(t-1), dY'(t-1)$          | 0.696          |
| $dX'(t-1), dY'(t-1), X'(t-1)$ | 0.959          |

Secondo commento: si conferma, ovviamente, il ruolo del movimento precedente, con la possibile interpretazione che - in un ambiente costante - è sufficiente sviluppare il riferimento ad una delle due direzioni di movimento (la direzione dell'asse  $X$ ), lasciando all'altra un ruolo dipendente dalla prima. Quella individuata è una struttura di agente complessa, ma soprattutto imprevedibile a priori. Con l'esperimento si è verificata la possibilità di ottenere comportamenti sofisticati da strutture semplici, senza regole di comportamento definite a priori.

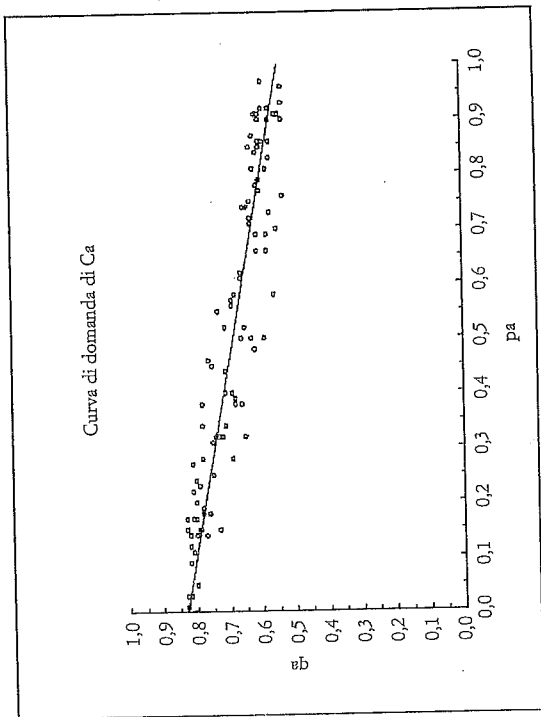


Fig. 7. Comportamenti corrispondenti ai diversi livelli di prezzo registrati nell'esperimento.

si effetti. Quello che si ottiene, è equivalente all'effetto della curva di domanda? In senso stretto no, ma descrive un comportamento assai diffuso!

### 5.3.2. *Avversione al rischio in un agente che opera in borsa*

Nel primo modello con un solo agente operante in un mercato di borsa, non compaiono né EO né EP

La struttura completa del modello è esposta nell'appendice A. Le decisioni di azione sono di acquisto di azioni nella misura  $A_i$  e di vendita delle stesse nella misura  $V_i$ ; la doppia transazione potrebbe essere eliminata considerando il saldo, ma in questo modo si ha una visione più chiara del comportamento dell'AAA. L'agente formula anche valutazioni sugli effetti delle proprie azioni, secondo lo schema *standard* cui si applicano i CT. Primo effetto, i veri contratti  $A_i$  e  $V_i$ , che stipulerà con uno degli altri soggetti; nel modello con un solo agente l'ipotesi è che la controparte sia sempre disponibile nella misura desiderata, per cui  $A_i = A$ , e  $V_i = V$ . Gli scambi sono regolati al prezzo di apertura del giorno, che è anche il prezzo di chiusura del giorno precedente. Altre valutazioni sugli effetti sono:  $M_i$ , quantità di moneta residua dopo acquisti e vendite;  $S_i$ , quantità di azioni come sopra;  $W_i$ , somma di

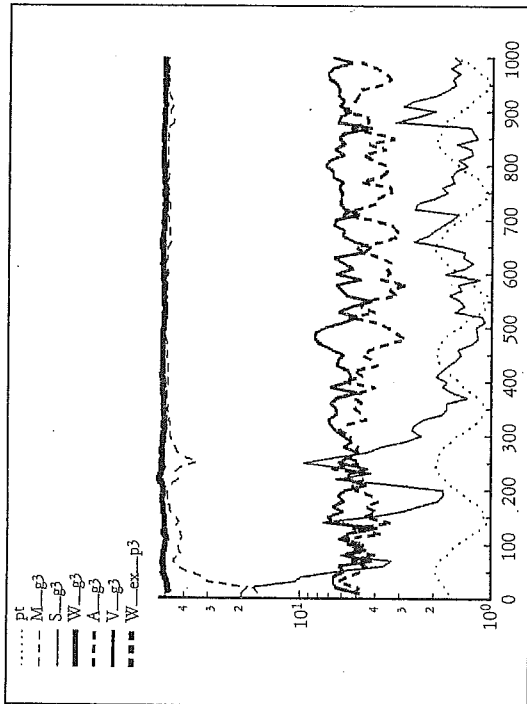


Fig. 8. Avversione al rischio in modelli con un solo agente, senza EO.

$M_i$  e di  $S_i$ , valutato al prezzo di chiusura del giorno. La differenza, tra il prezzo cui si decide di compiere l'operazione (apertura) e quello di chiusura con cui si valuta la ricchezza, è la chiave per capire i comportamenti degli AAA, in particolare di quelli che scaturiscono dalla introduzione dell'EO.

Il modello dell'appendice A gestisce sempre 20 agenti; quando gli agenti sono indipendenti, la complessità del modello è soltanto apparente (effettua in parallelo la simulazione di 20 esperimenti mono-agente). Rispetto alle equazioni dell'appendice A, le [A.1] e [A.2] sono da sostituire con:  $*A_i = A$ ;  $*V_i = V$ .

Si presenta il grafico di uno solo degli agenti considerati; i valori diversi da  $p_i$  sono segnati con  $gm$ , in cui  $g$  sta per congettura (*guess*) e  $m$  è il numero identificativo dell'agente. Esaminando la figura 8, nonché le successive, si osservi in particolare  $M_g$  e  $S_g$ , per valutarne le relazioni con il ciclo del prezzo.

Qui, senza EO né EP, si sviluppa un comportamento volto a evitare il rischio: l'agente vende le azioni e detiene moneta. Il meccanismo sottostante, determinato dai CT, si sviluppa come segue: i prezzi cambiano continuamente provocando spostamenti tra le congetture e i *target* relativi agli effetti delle azioni; la detenzione di sola moneta neutralizza la fonte degli spostamenti.

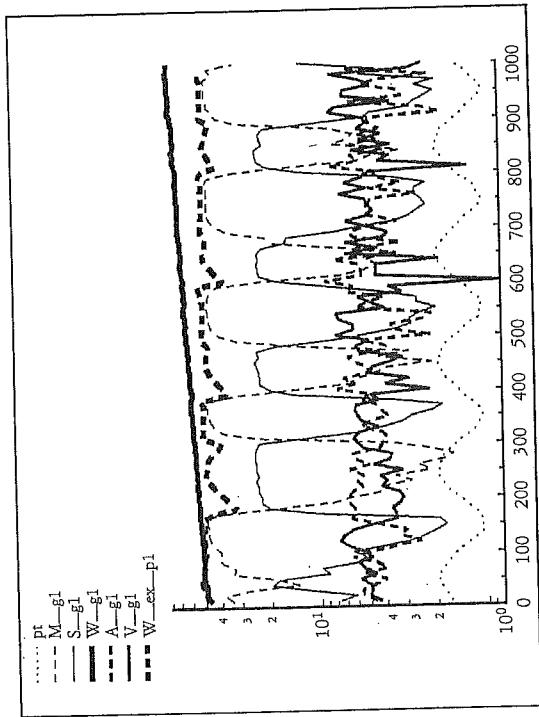


Fig. 9. Comportamento ciclico indotto all'EO.

### 5.3.3. Obiettivi esterni in modelli con un solo agente

Fin qui l'azione dello sperimentatore si è limitata alla costruzione dell'ambiente, senza influenzare direttamente il comportamento degli agenti. Introduciamo ora un semplice obiettivo esterno (EO), sempre utilizzando la struttura dell'appendice A, con le [A.1] e [A.2] modificate come nel precedente paragrafo; utilizziamo ora la definizione di  $EO$  della [A.8]. Ogni agente - gli agenti non interagiscono, dunque abbiamo una molteplicità di modelli mono-agente - ha ora l'obiettivo di accrescere la propria ricchezza.

Il comportamento muta profondamente passando dalla completa avversione al rischio della figura 8, alla ricerca continua di incrementi di  $W$  operando sulle azioni. Nella figura 9 si legge chiaramente che l'AAA acquista azioni quando il prezzo sale e viceversa, con una strategia scorretta a lungo termine, ma assai frequente nel comportamento reale degli operatori.

### 5.4. Modelli con agenti interattivi

Se agli agenti si chiede di operare non più con una controparte complessa secondo le equazioni del paragrafo 5.3.2, ma individuando una effet-

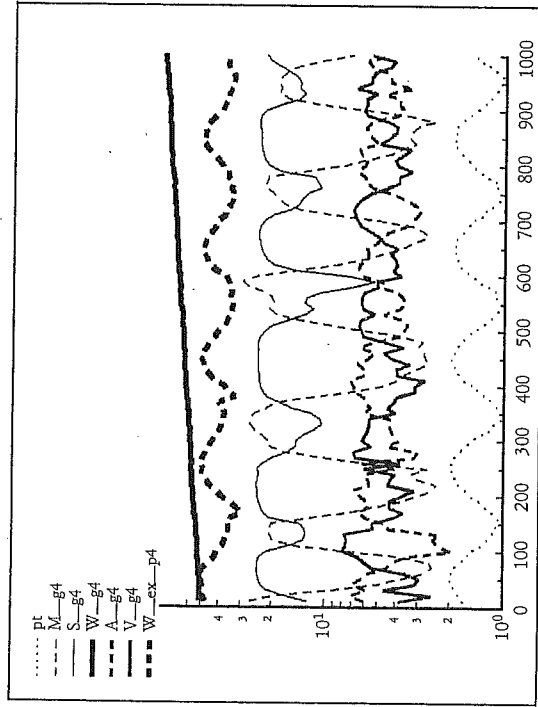


Fig. 10. Comportamento ciclico di un agente con EO, con controparte.

tiva controparte con cui trovare un accordo secondo le regole dell'appendice A, dal modello emergono ulteriori conseguenze. Da questo punto in avanti operano dunque le equazioni [A.1] e [A.2]. Ogni «giorno» gli agenti si incontrano casualmente e per coppie stabiliscono un doppio contratto, di acquisto-vendita e vendita-acquisto; l'incontro delle quantità dei due contratti (quantità che possono anche essere nulle, ovviamente) è scelto in un punto intermedio tra domanda e offerta, in modo casuale.

Il modello considera 20 agenti divisi in due popolazioni di dieci agenti: la prima formata da agenti cui è proposto l'EO dell'equazione [A.8] e la seconda formata da agenti senza EO, ma che - a differenza di quelli del paragrafo 5.3.2 - sono influenzati da proposte esterne (EP) nel momento in cui decidono le azioni. Le [A.6] e [A.7] sono sostituite dalle [A.9] e [A.10] per tenere conto della presenza degli EP (nella seconda popolazione). Definiamo il termine  $EPZ$  delle [A.9] e [A.10].

Introduciamo il caso nella determinazione delle azioni, nella forma  $C_{at} = 2K$ ; vedere l'appendice A per il significato di  $C$  (valore casuale equidistribuito tra 0 e 1) e del suo indice;  $K$  rappresenta l'ammontare massimo di azioni che possono essere quotidianamente acquistate o vendute, moltiplicato per 2 per avere nella metà dei casi il valore massimo, dato che il modello CT accetta valori tra 0 e  $K$ .

Introduciamo inoltre una forma generica di imitazione, consistente nell'adozione – da parte degli agenti della seconda popolazione – del comportamento di un agente a caso, della prima o della seconda popolazione. L'operatore lista {} e l'operatore  $H$  sono definiti nell'appendice A. Complessivamente:

$$\begin{aligned} EP^Z &= H[A, \{2 \ 20 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20\}, \\ &\quad C_{g1} \cdot 2K] \text{ nella [A.9]} \\ EP^Z &= H[V, \{2\}, C_{g1} \cdot 2K] \text{ nella [A.10]} \end{aligned}$$

Sperimentiamo dunque gli effetti del caso come fonte di rumore nei comportamenti, nonché quello dell'imitazione. Anche l'imitazione è interpretabile come fonte di rumore, ma il suo effetto è qui rilevante anche in quanto distoglie temporaneamente gli agenti della seconda popolazione dal loro comportamento «naturale» di avversione al rischio, cui tenderanno a ritornare determinando gli effetti che emergono negli esperimenti. Seguendo l'EP abbandonano infatti tale stato per poi tentare di riprenderlo, con conseguenze decisamente complesse di tipo anticiclico, apparentemente frutto di razionalità.

Nelle figure 10 (prima popolazione) e 11 (seconda popolazione) si mo-

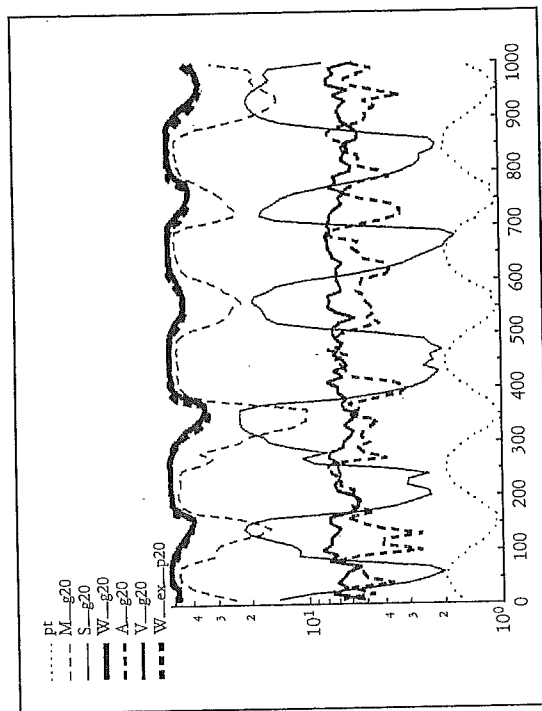


Fig. 11. Comportamento anticiclico di un agente interattivo con EP.

strano i comportamenti tipici di due agenti dell'esperimento: gli agenti della prima popolazione ripetono, attenuato per la necessità di trovare controparte reale tra gli agenti delle due popolazioni, il comportamento del paragrafo 5.3.3, figura 9; quelli della seconda popolazione si differenziano invece completamente, con il loro comportamento anticiclico, da quelli del paragrafo 5.3.2, figura 8.

Si sottolinea l'importanza del risultato ottenuto, che dimostra la possibilità di spiegare ciò che apparentemente è la conseguenza di un comportamento razionale, come il risultato di *shock* casuali e dell'imitazione, nell'ambito delle regole istituzionali e dei vincoli dell'ambiente. In altri termini: caso e imitazione contro razionalità. L'appendice B è dedicata all'analisi delle regole sottostanti ai comportamenti emersi.

Sintetizzando: meccanismi semplici sono sufficienti per sviluppare comportamenti complessi; il metodo dei CT consente di sviluppare autonomamente tali meccanismi. Questi risultati sono solo verificazioni di plausibilità di intuizioni e assolutamente non prove o verificazioni. Comunque si conferma che la strada proposta è utile per tentare di investigare e comprendere i motivi e le conseguenze attese o inattese del comportamento, anche nei confronti dei veri soggetti economici.

## 6. Futuri sviluppi

Gli sviluppi delle applicazioni CT sono rivolti sia alla costruzione di altri modelli (specializzazione del lavoro, modelli con scambio e lavoro), sia alla introduzione, nel modello di borsa, di prezzi endogeni e meccanismi più sofisticati di contrattazione; sia ad esperimenti sulla emergenza della moneta in un sistema di scambi.

Per quel che riguarda in generale i modelli fondati su agenti, anche con riferimento a Smith e Brown Cribbs (1994), si esplorerà la strada della coevoluzione di agenti con l'applicazione di algoritmi genetici ad agenti, eventualmente a CT, che possano autosviluppare le regole di interazione. Molta attenzione infine deve ancora essere dedicata all'aspetto dell'interpretazione dei comportamenti e delle regole implicite sviluppate dagli AAA.

## Appendice A. La struttura del modello di borsa a cross target

Il modello segue Terna (1993b); gli *input* della RNA che emula l'AAA sono:  $M_{t-1}$ , quantità di moneta posseduta al tempo  $t-1$ ;  $S_{t-1}$ , quantità di azioni possedute allo stesso tempo;  $W_{t-1}$ , ricchezza globale (moneta e azioni)

in  $t-1$ :  $A_{t-1}$ ,  $V_{t-1}$ ,  $A_{t-1}$ ,  $V_{t-1}$ , quantità di azioni acquistate e vendute al tempo  $t-1$  o  $t-2$ ;  $p_{t-3}$ ,  $p_{t-2}$ ,  $p_{t-1}$ , prezzi esogeni, ai tempi indicati.

Dal lato degli effetti gli *output* sono:  $Ac_t$ ,  $Vc_t$ , congetture relative agli effetti contrattati di acquisto o di vendita che si possono stipulare con un altro agente;  $M_t$ ,  $S_t$ ,  $W_t$ , valutazione degli effetti delle azioni del soggetto al tempo  $t$ , sulle grandezze indicate. Dal lato delle azioni:  $A_t$ ,  $V_t$ , valutazioni in merito alle quantità di azioni che il soggetto vorrebbe acquistare e vendere al tempo  $t$ . Globalmente, 10 *input*, con 13 nodi *hidden* e 7 *output*.

Si utilizzano i seguenti operatori non *standard*:

$H[x_1, x_2, \dots, x_n] = x_i$ , in cui  $x_i$  è il valore  $x$  maggiore in modulo;

$C_p$ ,  $i_{mo}$  valore casualmente distribuito in modo uniforme nell'intervallo  $0 \div 1$ ; operando il modello nella versione estesa con 20 soggetti, gli operatori  $C$  (come  $C_{61}$  nella [A.1] o  $C_{31}$ ,  $C_{32}$  e  $C_{33}$  nelle [A.9] e [A.10] o  $C_{81}$  nella definizione di  $EPZ$  del paragrafo 5.4) sono numerati tenendo conto della presenza di tutti i soggetti artificiali;

$\{i \neq s_1, s_2, \dots, s_n\}$  operatore lista numero  $i$ , che sceglie casualmente tra  $n$  soggetti, evitando la scelta del soggetto di cui simula l'azione; la lista completa compare solo nella prima dichiarazione, mentre successivamente si usa la forma  $\{i\}$ . Si possono utilizzare più operatori lista, con numeri differenti. In ogni «giorno» dell'esperimento il valore di ogni operatore lista, una volta stabilito, resta costante.

Le equazioni che seguono descrivono i *target*; le variabili precedute dall'asterisco sono grandezze *target*, eventualmente contraddistinte con EO o EP. Gli agenti nella versione estesa sono 20 (anche quando il modello opera con un solo agente, internamente produce la simulazione di 20 esperimenti mono-agente). La complessità della notazione è legata al fatto che le equazioni sono «regole» dal punto di vista della metodologia CT.

$$[A.1] \quad *Ac_t = (V_t \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20\} - A_t) \cdot C_{61} + A_t$$

$$[A.2] \quad *Vc_t = (A_t \{1\} - V_t) \cdot (1 - C_{61}) + V_t$$

$$[A.3] \quad *M_t = *M_{t-1} + (*Vc_t - *Ac_t) \cdot p_{t-1}$$

$$[A.4] \quad *S_t = *S_{t-1} + *Ac_t - *Vc_t$$

$$[A.5] \quad *W_t = *M_t + *S_t \cdot p_t$$

$$[A.6] \quad *A_t = H[(Ac_t - *Ac_t), -C_1 \cdot (M_t - *M_t)/p_{t-1}, C_2 \cdot (S_t - *S_t), -C_3 \cdot (W_t - *W_t)/(p_{t-1} - p_t)] + A_t$$

[A.7]

$$*V_t = H[(Vc_t - *Vc_t), (1 - C_1) \cdot (M_t - *M_t)/p_{t-1}, -(1 - C_2) \cdot (S_t - *S_t), (1 - C_3) \cdot (W_t - *W_t)/(p_{t-1} - p_t)] + V_t$$

Questo lo schema generale, senza EO o EP. L'obiettivo implicito degli AAA è dunque sin qui soltanto lo sviluppo della coerenza tra azioni e effetti, secondo i CT. Ciascuno agisce, comperando o vendendo, al prezzo  $p_{t-1}$ , cioè al prezzo di chiusura del giorno precedente, noto a tutti gli agenti; dopo le azioni, alla fine della giornata, gli agenti conoscono il prezzo di chiusura del giorno; si ricorda che tutti i prezzi sono esogeni.

Le [A.1] e [A.2] determinano un valore intermedio, fissandolo in modo casuale, tra offerta e domanda in ogni coppia di agenti tra cui si svolge uno scambio; altre possibilità (il minimo, la media aritmetica) non danno risultati diversi da quelli esposti.

Si può agevolmente introdurre nel modello un obiettivo esterno (EO) come quello indicato dalla [A.8], con il significato di incremento giornaliero, ad un certo tasso, della ricchezza complessiva:

$$[A.8] \quad EO *W_t = EO *W_{t-1} \cdot 1.0005$$

L'equazione originale [A.5] opera comunque sempre per determinare  $*W_t$ , che è impiegato nelle [A.6] e [A.7]. Gli agenti della popolazione con EO (che chiamiamo prima popolazione; restano agenti senza EO a formare la seconda) modificano i pesi con cui determinano le azioni al fine di rendere il più possibile redditizia la differenza tra  $p_{t-1}$  e  $p_t$ . Si sottolinea che il secondo prezzo è quello usato giornalmente per determinare la ricchezza  $W$ .

Gli esperimenti sono svolti sulla base di un prezzo esogeno, generato da una funzione sinusoidale con min 1.05, ampiezza 0.9 e con un disturbo casuale distribuito uniformemente nell'intervallo  $\pm 0.05$ ; il prezzo di partenza è circa 1.5. Nelle equazioni [A.6, A.7] le correzioni sono condotte su  $A_t$  e  $V_t$  come variabili che influenzano i valori  $Ac_t$  e  $Vc_t$ , che sono gli effetti su cui si fonda la determinazione di ogni altro effetto.

Infine, per l'esperimento del paragrafo 5.4, e con riferimento agli agenti della seconda popolazione (quella senza EO) le [A.6] e [A.7] devono essere sostituite con:

$$[A.9] \quad *A_t = H[(Ac_t - *Ac_t), -C_{31} \cdot (M_t - *M_t)/p_{t-1}, C_{32} \cdot (S_t - *S_t), -C_{33} \cdot (W_t - *W_t)/(p_{t-1} - p_t), EPZ] + A_t$$

$$[A.10] \quad *V_t = H[(Vc_t - *Vc_t), (1 - C_{31}) \cdot (M_t - *M_t)/p_{t-1}, -(1 - C_{32}) \cdot (S_t - *S_t), (1 - C_{33}) \cdot (W_t - *W_t)/(p_{t-1} - p_t), EPZ] + V_t$$

per introdurre l'EP come definito nel paragrafo 5.4 stesso.

## Appendice B. Regole e comportamento: AAA del paragrafo 5.4

Per interpretare il comportamento degli agenti del paragrafo 5.4 (in particolare i casi 4 e 20 delle figure 10 e 11) si adotta la tecnica del *learning* *ripetuto ex post*, o a lungo termine, introdotta nel paragrafo 5.1. Al termine dell'intero ciclo di 1000 «giorni» di esperimento, ogni AAA riapprende – adattando i pesi delle matrici della RNA su cui l'agente stesso si fonda – dai dati da esso stesso generati (con riferimento agli *input* via via registrati e agli *output* della RNA), si utilizzano gli *output* e non i *target*, operando come nel caso della costruzione dei grafici, allo scopo di considerare i dati corrispondenti alle effettive azioni dell'AAA), con un *learning* di 100 epoche, pari in tutto a 100000 cicli di correzione dell'errore.

Sulla base dei dati di *input* della RNA si riproducono i valori di *output* dopo il riapprendimento, senza l'effetto delle correzioni CT e delle conseguenze della interazione all'interno del modello. I valori di  $R^2$ , tra gli *output* della fase di azione e apprendimento e gli *output* dopo il riapprendimento, indicano il grado di generalizzazione più o meno elevata che la situazione descritta nel modello e i dati emersi consentono; possono infatti sussistere situazioni, strettamente dipendenti dall'interazione tra agenti, in cui il riapprendimento non riesce comunque a sviluppare un soddisfacente adattamento *ex post*.

Esaminiamo la ricostruzione dei valori di output relativi a  $M_t, S_t$ , secondo l'euristica introdotta nel paragrafo 4.2 (In questa appendice si adotta, d'ora in avanti, la notazione semplificata  $M$  per  $M_t$ ,  $M_{t-1}$  per  $M_{t-1}$ , ecc.). I simboli hanno i significati dell'appendice A.

Con riferimento agli agenti 4 e 20, la costruzione additiva delle regole volte a spiegare le determinazioni dei soggetti simulati su  $M$  e  $S$  è fondata rispettivamente sui dati delle tabelle 2 e 3, relativi: alla matrice GWM definita nel paragrafo 4.2; ai valori delle derivate (MPD, secondo la definizione del paragrafo 5.2) calcolate in corrispondenza di ipotetici punti con valori di *input* intermedi tra il valore minimo e quello massimo negli intervalli delle grandezze di ingresso; la media dei valori delle derivate calcolate per ogni *pattern* (MD, secondo la definizione del paragrafo 5.2).

Le sequenze plausibili di spiegazione di  $M$  e  $S$ , con i relativi valori di  $R^2$ , sono le seguenti

Agente 4, ricostruzione della regola esplicativa di  $M$ ; l'analisi dei risultati dà:

| Variabili in <i>input</i>                        | $R^2$ (con tutti gli <i>input</i> 0.873) |
|--------------------------------------------------|------------------------------------------|
| $M_{-1}$                                         | 0.724                                    |
| $M_{-1}, p_{-3}$                                 | 0.457                                    |
| $M_{-1}, p_{-3}, p_{-1}$                         | 0.730                                    |
| $M_{-1}, p_{-3}, p_{-1}, W_{-1}$                 | 0.769                                    |
| $M_{-1}, p_{-3}, p_{-1}, W_{-1}, A_{-2}$         | 0.761                                    |
| $M_{-1}, p_{-3}, p_{-1}, W_{-1}, A_{-2}, V_{-2}$ | 0.776                                    |

Agente 4, ricostruzione della regola esplicativa di  $S$ ; l'analisi dei risultati dà:

| Variabili in <i>input</i>                | $R^2$ (con tutti gli <i>input</i> 0.866) |
|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $M_{-1}$                                 | 0.701                                    |
| $M_{-1}, p_{-3}$                         | 0.611                                    |
| $M_{-1}, p_{-3}, p_{-1}$                 | 0.709                                    |
| $M_{-1}, p_{-3}, p_{-1}, S_{-1}$         | 0.810                                    |
| $M_{-1}, p_{-3}, p_{-1}, S_{-1}, V_{-1}$ | 0.816                                    |

Agente 20, ricostruzione della regola esplicativa di  $M$ ; l'analisi dei risultati dà:

| Variabili in <i>input</i>                | $R^2$ (con tutti gli <i>input</i> 0.945) |
|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $M_{-1}$                                 | 0.781                                    |
| $M_{-1}, W_{-1}$                         | 0.832                                    |
| $M_{-1}, W_{-1}, S_{-1}$                 | 0.888                                    |
| $M_{-1}, W_{-1}, S_{-1}, p_{-3}$         | 0.923                                    |
| $M_{-1}, W_{-1}, S_{-1}, p_{-3}, A_{-2}$ | 0.925                                    |

Agente 20, ricostruzione della regola esplicativa di  $S$ ; l'analisi dei risultati dà:

| Variabili in <i>input</i>                | $R^2$ (con tutti gli <i>input</i> 0.945) |
|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $M_{-1}$                                 | 0.756                                    |
| $M_{-1}, W_{-1}$                         | 0.812                                    |
| $M_{-1}, W_{-1}, A_{-1}$                 | 0.821                                    |
| $M_{-1}, W_{-1}, A_{-1}, A_{-2}$         | 0.816                                    |
| $M_{-1}, W_{-1}, A_{-1}, A_{-2}, p_{-3}$ | 0.908                                    |

Commento: l'agente 4, che opera sotto l'influsso dell'EO relativo a  $W$ , sviluppando un comportamento ciclico controproducente, determina  $M$  in funzione di  $M_{-1}$ , di due prezzi (che considerati isolatamente riducono  $R^2$ , e

quindi sono da interpretare come tra loro interagenti in modo non lineare), e di  $W$ ; le altre potenziali fonti di spiegazione non paiono rilevanti. L'agente determina  $S$  sulla base delle stesse variabili, ma con un rilevante contributo di  $S_{-1}$ . In sintesi, le due grandezze sono spiegate sulla base del loro valore precedente, con un significativo influsso di  $M_{-1}$  in entrambi i casi, e dei prezzi.

L'agente 20, influenzato dall'EP e che sviluppa in termini apparentemente razionali un comportamento anticiclico, determina  $M$  principalmente in funzione di  $M_{-1}$ ,  $W_{-1}$ ,  $S_{-1}$ , con un effetto dei prezzi meno determinante. Stabi-

TAB. 2. AAA n. 4

|               | Input    | $S_{-1}$ | $W_{-1}$ | $A_{-1}$ | $V_{-1}$ | $A_{-2}$ | $V_{-2}$ | $P_{-3}$ | $P_{-2}$ | $P_{-1}$ |
|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Output<br>GWM | $M_{-1}$ |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|               | $M$      | 15.0     | -2.1     | -4.4     | 4.7      | -5.2     | 5.3      | -5.3     | -2.9     | 7.2      |
| MPD           | $S$      | -14.8    | 7.1      | 2.1      | -5.9     | 6.8      | -5.1     | 6.0      | 2.6      | -6.4     |
|               | $M$      | 0.836    | -0.168   | -0.318   | 0.269    | -0.305   | 0.310    | -0.311   | -0.135   | 0.456    |
| MD            | $S$      | -0.835   | 0.356    | 0.148    | -0.323   | 0.374    | -0.346   | 0.339    | 0.142    | -0.450   |
|               | $M$      | 0.434    | -0.053   | -0.116   | 0.138    | -0.156   | 0.155    | -0.154   | -0.105   | 0.209    |
| MD (sqm)      | $S$      | -0.433   | 0.191    | 0.002    | -0.176   | 0.201    | -0.180   | 0.176    | 0.094    | -0.216   |
|               | $M$      | 0.194    | 0.046    | 0.106    | 0.066    | 0.079    | 0.079    | 0.082    | 0.101    | 0.129    |
|               | $S$      | 0.210    | 0.092    | 0.084    | 0.080    | 0.102    | 0.088    | 0.093    | 0.111    | 0.112    |

TAB. 3. AAA n. 20

|               | Input    | $S_{-1}$ | $W_{-1}$ | $A_{-1}$ | $V_{-1}$ | $A_{-2}$ | $V_{-2}$ | $P_{-3}$ | $P_{-2}$ | $P_{-1}$ |
|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Output<br>GWM | $M_{-1}$ |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|               | $M$      | 18.8     | 4.9      | 13.0     | 4.0      | -2.0     | 4.4      | -2.4     | 1.0      | -2.2     |
| MPD           | $S$      | -14.3    | 5.3      | -7.4     | -4.5     | 3.8      | -4.0     | 3.3      | -1.6     | 0.9      |
|               | $M$      | 0.869    | 0.221    | 0.612    | 0.204    | -0.141   | 0.221    | -0.155   | 0.048    | -0.113   |
| MD            | $S$      | -0.578   | 0.140    | -0.357   | -0.261   | 0.172    | -0.236   | 0.152    | -0.083   | 0.041    |
|               | $M$      | 0.647    | 0.163    | 0.448    | 0.143    | -0.100   | 0.156    | -0.109   | 0.037    | -0.083   |
| MD (sqm)      | $S$      | -0.418   | 0.120    | -0.243   | -0.173   | 0.117    | -0.156   | 0.101    | -0.056   | 0.034    |
|               | $M$      | 0.170    | 0.037    | 0.129    | 0.063    | 0.039    | 0.065    | 0.043    | 0.013    | 0.020    |
|               | $S$      | 0.123    | 0.035    | 0.091    | 0.073    | 0.032    | 0.074    | 0.047    | 0.025    | 0.009    |

lisce  $S$  sulla base di  $M_{-1}$ ,  $W_{-1}$  e delle azioni di acquisto precedenti. Ciò che è interessante è la presenza di  $W_{-1}$ , quindi del legame con la valutazione della ricchezza, pur in un contesto senza EO, come effetto dell'apparente razionalità derivante da caso e imitazione.

## Riferimenti bibliografici

- Arthur W.B. (1990), *A Learning Algorithm that Mimics Human Learning*, Santa Fe Institute, Working Paper 90-026.
- Beltratti A., Margarita S., Terna P. (1995), *Neural Networks for Economic and Financial Modelling*, in preparazione.
- Bourgine P., Walliser B., Lemoigne J.L. (1991), An interdisciplinary research between economic and cognitive sciences, in *Economics and Cognitive Science* (a cura di P. Bourgine e B. Walliser), Tarrytown, Pergamon Press.
- Cammarata S. (1990), *Reti neurali - Una introduzione all'«altra» intelligenza artificiale*, Milano, Etas.
- Connell J.H. (1990), *Minimalist Mobile Robotics - A Colony-style Architecture for an Artificial Creature*, San Diego, Academic Press.
- Fabbri G. e Orsini R. (1993), *Reti neurali per le scienze economiche*, Padova, Muzzio.
- Fontana W. (1992), Algorithmic chemistry, in *Artificial Life II* (a cura di C.G. Langton e al.), New York, Addison-Wesley, pp. 159-210.
- Gallant S.I. (1993), *Neural Network Learning and Expert Systems*, Mit Press, Cambridge.
- Holland J.H. e Miller J.H. (1991), Artificial Adaptive Agents in Economic Theory, *American Economic Review*, pp. 365-370.
- Hornik K., Stinchcombe M., White H. (1990), Universal Approximation of an Unknown Mapping and Its Derivatives Using Multilayer Feedforward Networks, *Neural Networks*, pp. 551-560.
- Kirman A.P. (1992), Whom or What Does the Representative Individual Represent?, *Journal of Economic Perspectives*, pp. 117-136.
- Kosko B. (1992), *Neural Networks and Fuzzy Systems: a Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*, Englewood Cliffs, Prentice Hall.
- Langton C.G. (a cura di) (1989), *Artificial life*, New York, Addison-Wesley.
- Langton C.G. e al. (a cura di) (1992), *Artificial life II*, New York, Addison-Wesley.
- Lindgren K. (1992), Evolutionary phenomena in simple dynamics, in *Artificial Life II* (a cura di C.G. Langton e al.), New York, Addison-Wesley, pp. 295-312.
- McClelland J.L. e Rumelhart D.E. (1988), *Explorations in Parallel Distributed Processing - A Handbook of Models, Programs, and Exercises*, Cambridge, Mit Press.
- Parisi D., Cecconi F., Nolfi S. (1990), *Econets: Neural networks that learn in an environment*, Network, pp. 149-168.
- Ray T. (1992) An approach to the synthesis of life, in *Artificial Life II* (a cura di C.G. Langton e al.), New York, Addison-Wesley, pp. 371-408.

- Sargent T.J. (1993), *Bounded Rationality in Macroeconomics*, Oxford, Clarendon Press.
- Simon H. (1969), *The Sciences of the Artificial*, Cambridge, Mit Press.
- Simon H. e al. (1992), *Economics, Bounded Rationality and the Cognitive Revolution* (a cura di M. Egidi e R. Marris), Aldershot, Elgar.
- Smith R.E. e Brown Cibbs III, H. (1994) Is a Learning Classifier System a Type of Neural Network?, *Evolutionary Computation*, pp. 19-36.
- Smith V.L. (1994), Economics in the Laboratory, *Journal of Economic Perspectives*, pp. 113-131.
- Terna P. (1991), Labour, Consumption and Family Assets: A Neural Network Learning from Its Own Cross-Targets, in *Artificial Neural Networks* (a cura di T. Kohonen e al.), Amsterdam, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), pp. 1759-62.
- (1992a), Artificial Economic Agents, in *SPIE Vol. 1709, proceedings of Applications of Artificial Neural Networks III*, pp. 1003-14.
- (1992b), Microeconomic Experiments by Neural Networks, in *Artificial Neural Networks 2* (a cura di I. Aleksander e J. Taylor), Amsterdam, Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), pp. 1339-42.
- (1993a), Artificial Interacting Agents for Stock Market Experiments: the Cross-Target Method, in *Proceedings of ICANN '93* (a cura di S. Giesen e B. Kappen), London, Springer-Verlag.
- (1993b), Randomness, Imitation or Reason to Explain Agents' Behaviour into an Artificial Stock Market, in *Advances in Artificial Intelligence* (a cura di P. Torasso), Berlin, Springer-Verlag.